Cálculo Numérico

Método de Newton-Raphson

Prof. Flávio Murilo de Carvalho Leal
Centro Universitário de Juazeiro do Norte
Uninassau

- O Método de Newton-Raphson é um algoritmo iterativo para encontrar raízes de funções não lineares.
- Baseia-se em aproximações sucessivas da solução desejada.
- Utiliza a tangente da curva da função para obter a próxima estimativa.

Fórmula de Iteração

Dada uma função $f(x)$, a fórmula do método é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- x_n: aproximação atual.
- x_{n+1}: próxima aproximação.
- $f'(x)$: derivada da função.

Problema

Resolver $\sqrt{2} = x$, ou seja:

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

- $f'(x) = 2x$
- Iteração:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

- Com $x_0 = 1$, obtemos:

$$x_1 = 1.5, \quad x_2 \approx 1.4167, \quad x_3 \approx 1.4142$$

Vantagens do Método

- Convergência rápida (ordem quadrática) quando o chute inicial é bom.
- Útil para funções complexas onde métodos analíticos falham.
- Simples de implementar em software.

Desvantagens do Método

- Necessidade de calcular a derivada da função.
- Pode divergir se a aproximação inicial for ruim.
- Não garante convergência para todas as funções.
- Se $f'(x) = 0$ em algum ponto, o método falha.

Por que é desafiador?

Não é possível isolar x algebricamente:

$$e^x = 3x + 2 \quad \not\Rightarrow \quad x = \text{expressão fechada}$$

Tentar aplicar ln: $\quad x = \ln(3x + 2)$ — ainda implícito!

Example

Solução analítica: **inexistente**.
Solução numérica: **indispensável**.

Defina:

$$f(x) = e^x - 3x - 2$$

Queremos: $f(x) = 0$.
Derivada:

$$f'(x) = e^x - 3$$

Iteração:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - 3x_n - 2}{e^{x_n} - 3}$$

Iterações Numéricas — Chute inicial: $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
\text{Iteração 1:}\quad & f(2) \approx 7.389 - 6 - 2 = -0.611 \\
& f'(2) \approx 7.389 - 3 = 4.389 \\
& x_1 = 2 - \frac{-0.611}{4.389} \approx 2.139 \\[1em]
\text{Iteração 2:}\quad & f(2.139) \approx 8.500 - 6.417 - 2 = 0.083 \\
& f'(2.139) \approx 8.500 - 3 = 5.500 \\
& x_2 = 2.139 - \frac{0.083}{5.500} \approx 2.124 \\[1em]
\text{Iteração 3:}\quad & f(2.124) \approx 8.370 - 6.372 - 2 = -0.002 \\
& f'(2.124) \approx 5.370 \\
& x_3 = 2.124 - \frac{-0.002}{5.370} \approx 2.1244
\end{aligned}$$

Solução e Verificação

$$\boxed{x \approx 2.1244}$$

Verificação:

$$e^{2.1244} \approx 8.372, \quad 3(2.1244) + 2 = 8.3732$$

Erro absoluto: ≈ 0.0012 — convergência rápida e precisa!

Conclusão

Newton-Raphson foi **indispensável**:
— Sem solução analítica.
— Convergência eficiente com derivada conhecida.
— Ideal para equações transcendentes.